

求解双曲守恒律方程的自适应 人工黏性熵稳定格式

任 炯, 封建湖, 梁 楠, 刘友琼
(长安大学 理学院, 西安 710064)

摘 要: 采用熵守恒格式求解双曲守恒律方程不满足熵稳定条件. 为了达到熵稳定, 需要在熵守恒格式的基础上增加黏性机制, 使总熵耗散. 鉴于自适应人工黏性在不同的计算区域上其黏性大小的变化特点, 在熵守恒通量的基础上添加经过修正的自适应人工黏性通量构造出一种新的结构简单的熵稳定格式. 根据自适应人工黏性的自适应性, 并经过简单调节黏性比例系数 C 之后, 该格式可以在不使用限制器的情况下达到整体的高分辨率, 表现出: 在间断区域有足够的数值耗散保证稳定; 在光滑区域, 黏性很小, 不会影响格式在此的高精度. 最后的几个数值算例以熵稳定 ERoe 格式和高分辨率熵稳定 EYee 格式的数值结果作为参照, 分析说明这种格式的特性.

关 键 词: 双曲守恒律; 弱局部剩余量; 自适应人工黏性; 熵稳定; 高分辨率
中图分类号: V411.3; O354; O241.82 **文献标志码:** A

Adaptive artificial viscosity entropy stable scheme for hyperbolic conservation laws

REN Jiong, FENG Jian-hu, LIANG Nan, LIU You-qiong
(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: The entropy stable conditions may not be met if entropy conservation schemes are used to solve the equations of hyperbolic conservation laws. To achieve entropy stability, the total entropy of a numerical scheme must be dissipative. The frequently-used method is to add a viscosity mechanism to an entropy conservative scheme. By considering the change characteristics of the size of adaptive artificial viscosity in different parts of the computational domain, a new simple entropy stable scheme was proposed by combining the flux of entropy conservation with the corrected flux of adaptive artificial viscosity. According to the adaptivity of adaptive artificial viscosity, this scheme can achieve the overall high resolution without using any limiters but adjusting the viscosity proportional coefficients C . So the computed solution was stable at its discontinuous parts with enough numerical dissipation while maintaining the high order accuracy at smooth parts with very small viscosity. At the end, several numerical examples were performed to analyze the characteristics of the proposed scheme with reference to the numerical results of entropy stable ERoe scheme and high resolution entropy stable EYee scheme.

Key words: hyperbolic conservation laws; weak local residual (WLR);
adaptive artificial viscosity; entropy stable; high resolution

双曲守恒律方程是计算流体力学中一类反映物理现象及其规律的重要方程,如气体动力学中的 Euler 方程、浅水动力学中的浅水波方程,这些方程所涉及的物理模型在航空航天、海洋等工程领域都有广泛的应用. 因此关于该类方程的数值求解方法一直是一个很重要的研究课题. 其中非线性双曲守恒律方程最为典型,因为即使其初值函数光滑,随着时间的演化,它的解也可能出现如激波、接触间断等间断解. 针对间断解的问题, Lax 于 1954 年在文献[1]中提出弱解的定义,这个定义允许间断解存在,但弱解并不唯一,为了在弱解中寻找双曲守恒律方程具有物理意义的解, 1973 年 Lax 又提出了熵稳定条件^[2],满足熵稳定条件的数值格式在求解双曲守恒律方程时会避免膨胀激波等非物理现象的产生,并得到唯一且具有物理意义的解. 长期以来为了满足熵稳定,习惯的做法是根据比较原则给数值格式添加适量数值黏性. 1987 年 Tadmor 在文献[3]里引入熵变量和熵势的概念,构造了一类 2 阶的熵守恒格式,其数值通量保持总熵不变. 他还同时提出:一个 3 点格式只需含有比熵守恒格式更多的黏性则熵是稳定的. 因此要达到熵稳定,只需在该熵守恒格式的基础上适当地加入一些黏性. Tadmor 和 Zhong 针对这个结论,把该思想应用于 Navier-Stokes 方程组^[4]和浅水波方程组^[5],目的是利用方程组本身具有的黏性项和热传导项作为方程组的耗散项来得到合适的熵稳定格式,但是实验证明这种方法要有效,网格划分的必须非常细密. 2006 年 Roe 提出的是在熵守恒格式的基础上加上他本人提出的 Roe 格式的数值黏性的方法,并且得到了到目前为止比较理想的熵稳定格式^[6],称为 ERoe 格式,但该格式是 1 阶精度的,比熵守恒格式的精度有所降低. 鉴于此,罗力等人又提出在 ERoe 格式的基础上加入 Yee 构造的满足总变差减少(total variation diminishing, TVD)条件的 combined superbee 限制器^[7]来得到高分辨率熵稳定格式,即 EYee 格式^[8]. 该格式通过限制器的开关作用来达到:在解的光滑区域采用熵守恒格式计算,保持 2 阶精度且避免非物理解的产生;在间断区域转用 ERoe 格式计算,有效抑制振荡,同时保持良好的间断捕捉效果.

本文在前人研究的基础上,从另一个角度出发构造熵稳定格式:即在熵守恒格式的基础上增加人工黏性来达到熵稳定. 早在 1950 年, Von Neumann 和 Richtmyer 就提出了增加人工黏性

的思想^[9],后来还有很多研究人员采用过这种思想,如文献[10-11]等. 然而所有的这些研究都在说明一个事实:构造一个高精度且稳健的人工黏性方法最大的困难就是如何在振荡区域增加足够数量的数值扩散来保证格式的稳定性,而在计算区域的其他地方,这个扩散能够消失或足够地小以至于不会影响格式在这些区域的高精度. 为了克服这个困难, Kurganov 等在 2012 年提出了自适应人工黏性的方法^[12]. 这种方法是使用弱局部剩余量(weak local residual, WLR)构造人工黏性系数,使该系数与 WLR 的大小成比例,这个比例关系使所构造的人工黏性能够在不同的计算区域上相应地调整其大小,并通过简单地调试黏性比例系数 C 的大小来达到:在计算的非光滑区域有足够的数值扩散来保证稳定;而在光滑区域,黏性很小,不影响格式在此的高精度. 基于此特点,在熵守恒格式的基础上添加自适应人工黏性项,不仅能使格式达到熵稳定的效果,而且还能达到整体上的高分辨率. 需要指出的是:本文对文献[12]中的自适应人工黏性做了简单修正,使格式中的黏性通量既能体现黏性系数与 WLR 大小的比例关系又能对所有的问题在形式上具有统一性. 文章构造的熵稳定格式具有形式结构简单,避免了限制器的使用,能达到高分辨率等特点. 为了直观形象,本文将以熵稳定 ERoe 格式和高分辨率熵稳定 EYee 格式的数值结果作为参照来说明该格式的特点,其中 ERoe 和 EYee 格式的具体形式见文献[6,8]. 文章在数值算例部分给出了每个算例中黏性比例系数 C 调试的理想范围,具体的例子中选用了这个范围偏中间的值. 本文均采用均匀网格上的半离散有限体积格式,且用 Δx 表示空间步长, Δt 表示时间步长. 最后强调本文的目的只是想从另一个角度思考构造熵稳定格式的方法,希望其能达到与已有格式相同或更好的效果,并做了初步研究.

1 熵守恒格式

本文讨论双曲守恒律方程

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0 \quad (1)$$

其中 $(x, t) \in R \times R^+$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) \in R^N (N \geq 1)$ 是守恒变量, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 是通量函数.

1.1 弱解定义

在区域 $X \times [0, T]$ 上,如果对于所有的试探函数 $\phi(x, t) \in C_0^1(X \times [0, T])$, 都有函数

$\mathbf{u}(x, t) \in L^1_{\text{loc}}(R \times [0, T])$ 满足如下积分方程:

$$\int_{t=0}^T \int_X [\mathbf{u}(x, t) \phi_t(x, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) \phi_x(x, t)] dx dt + \int_X \mathbf{u}(x, 0) \phi(x, 0) dx = 0 \quad (2)$$

则称 $\mathbf{u}(x, t)$ 为双曲守恒律方程(1)的弱解.

1.2 熵稳定条件

如果弱解 $\mathbf{u}$ 满足

$$U(\mathbf{u})_t + F(\mathbf{u})_x \leq 0 \quad (3)$$

则 $\mathbf{u}$ 是唯一的且具有物理意义的解. 其中 $U(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{u}$ 的凸函数, 满足 $U''(\mathbf{u}) > 0$, 被称为熵函数, $F(\mathbf{u})$ 称为熵通量函数. 满足式(3)的 $U(\mathbf{u})$ 和 $F(\mathbf{u})$ 被称为熵对.

1.3 熵守恒格式

要构造熵守恒格式的数值通量, 需要引入熵变量和熵势的概念. 首先给定熵对 $(U(\mathbf{u}), F(\mathbf{u}))$, 则有熵变量 $\mathbf{v}(\mathbf{u}) = U'(\mathbf{u})$ 和熵势 $\phi(\mathbf{v}(\mathbf{u})) = \mathbf{v}(\mathbf{u})^T \mathbf{f}(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u})$, 且满足 $\mathbf{f}(\mathbf{v}(\mathbf{u})) = \nabla \phi(\mathbf{v}(\mathbf{u}))$. 熵守恒通量(用 $f_{j+1/2}^{\text{ec}}$ 表示, 上角标 ec 是 entropy conservative 的缩写)可以写成沿熵变量空间内路径

$$\mathbf{v}_{j+1/2}(\xi) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j+1}) + \xi(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j)$$

的积分形式^[3]

$$f_{j+1/2}^{\text{ec}} = \int_{\xi=-1/2}^{1/2} \mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1/2}(\xi)) d\xi$$

且由

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j)^T f_{j+1/2}^{\text{ec}} &= \int_{\xi=-1/2}^{1/2} \mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1/2}(\xi))^T (\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j) d\xi = \\ \int_{\xi=-1/2}^{1/2} \mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1/2}(\xi))^T d(\xi(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j)) &\stackrel{\text{换元}}{=} \\ \int_{\mathbf{v}_j}^{\mathbf{v}_{j+1}} \mathbf{f}(\mathbf{v})^T d\mathbf{v} &= \phi(\mathbf{v}_{j+1}) - \phi(\mathbf{v}_j) \end{aligned}$$

得到

$$(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j)^T f_{j+1/2}^{\text{ec}} = \phi(\mathbf{v}_{j+1}) - \phi(\mathbf{v}_j) \quad (4)$$

这个关系是 Tadmor 在文献[3]中给出的数值格式满足熵守恒的条件.

对于标量方程, 沿相空间内的积分路径只有直线形式, 因此数值通量具有唯一形式, 式(4)可以写成

$$f_{j+1/2}^{\text{ec}} = \frac{\phi(\mathbf{v}_{j+1}) - \phi(\mathbf{v}_j)}{\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j} \quad (5)$$

而对于守恒型方程组, 沿相空间内的积分路径有很多条, 选择不同路径积分, 会得到不同形式的熵守恒数值通量. 对于 Euler 方程组, Tadmor 提出

一种适用于各种守恒型系统的逐段分解积分的显式构造方法^[13]. 近年来 Roe 又推导出一种更简单的计算熵守恒通量的方法, 并且在文献[14]中由 Ismail 和 Roe 共同提出该方法的应用. 相比之下, Roe 的方法更容易编程实现, 因此本文选用 Roe 的方法计算 Euler 方程的熵守恒数值通量. 半离散熵守恒格式的具体形式如下:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{u}}_j = -\frac{1}{\Delta x} (f_{j+1/2}^{\text{ec}} - f_{j-1/2}^{\text{ec}}) \quad (6)$$

1.3.1 一维无黏 Burgers 方程

考虑无黏 Burgers 方程

$$u_t + f(u)_x = 0$$

其中 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, 我们取熵函数 $U(u) = \frac{1}{2}u^2$,

相应的熵通量函数 $F(u) = \frac{1}{3}u^3$, 则可得熵变量 $v(u) = U'(u) = u$, 熵势 $\phi(u) = v(u)f(u) - F(u) = \frac{1}{6}u^3$, 因此由式(5)可得无黏 Burgers 方程的熵守恒数值通量为

$$f_{j+1/2}^{\text{ec}} = \frac{1}{6} \frac{u_{j+1}^3 - u_j^3}{u_{j+1} - u_j} = \frac{u_j^2 + u_j u_{j+1} + u_{j+1}^2}{6}$$

1.3.2 一维 Euler 方程组

考虑气体动力学 Euler 方程

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0$$

其中 $\mathbf{u} = [\rho \quad \rho u \quad E]^T$ 是守恒型向量, $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [\rho u \quad \rho u^2 + p \quad u(E + p)]^T$ 是通量函数. ρ, u, p 和 E 分别为密度、速度、压强和总能, 状态方程为 $p = (\gamma - 1) \left[E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right]$, $\gamma = 1.4$ 为比热比, $S = \ln(p \rho^{-\gamma})$ 是 Euler 方程的熵. 下面给出使用 Roe 的方法^[14]得到的 Euler 方程的熵守恒通量

$$f_{j+1/2}^{\text{ec}} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T$$

$$f_1 = \bar{z}_2 \bar{z}_3^{\ln}, \quad f_2 = \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} f_1$$

$$f_3 = \frac{1}{2} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\bar{z}_3^{\ln}}{\bar{z}_1^{\ln}} + f_2 \right]$$

其中 z_1, z_2, z_3 分别是参数变量 $\mathbf{Z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T = \sqrt{\rho/p} [1 \quad u \quad p]^T$ 的 3 个分量. $\bar{a}$ 和 $a^{\ln}$ ($a = z_1, z_2, z_3$) 分别为对应量的算数平均和对数平均

$$\bar{a} = \frac{a_j + a_{j+1}}{2}$$

$$a^{\ln} = \frac{a_{j+1} - a_j}{\ln a_{j+1} - \ln a_j}$$

关于对数平均的详细计算见文献[14].

2 自适应人工黏性熵稳定格式的构造

2.1 一维弱局部剩余量

在区域 $X \times [0, T]$ 上, 对式(2)等号的左端定义如下:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \phi) := \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \int_{t=0}^T \int_X [\mathbf{u}(x, t) \phi_t(x, t) + \\ &\quad f(\mathbf{u}(x, t)) \phi_x(x, t)] dx dt \\ \mathbf{R}_2 &= \int_X \mathbf{u}(x, 0) \phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

假定计算区域 $X \times [0, T]$ 上单元交界面处的数值解 $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$ 已经得到, 令 $\mathbf{u}^\Delta(x, t)$ 为分段常数近似函数

$$\mathbf{u}^\Delta(x, t) := \mathbf{u}_{j+1/2}^n \quad (8)$$

其中 $(x, t) \in [x_j, x_{j+1}] \times [t^{n-1/2}, t^{n+1/2})$, 将式(8)代入式(7)有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{u}^\Delta, \phi) &:= \mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}'_2 \quad (9) \\ \mathbf{R}'_1 &= \int_{t=0}^T \int_X [\mathbf{u}^\Delta(x, t) \phi_t(x, t) + \\ &\quad f(\mathbf{u}^\Delta(x, t)) \phi_x(x, t)] dx dt \\ \mathbf{R}'_2 &= \int_X \mathbf{u}^\Delta(x, 0) \phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{R}(\mathbf{u}^\Delta, \phi)$ 被定义为 $\mathbf{u}^\Delta$ 针对于试探函数 ϕ 的弱剩余量. 为了近似得到这个弱剩余量, 本文采用与文献[12,15]中类似的方法, 即用局部试探函数

$$\phi_{j+1/2}^{n-1/2}(x, t) = B_{j+1/2}(x) B^{n-1/2}(t) \quad (10)$$

来近似试探函数 ϕ (此处主要为全局试探函数), 其中

$$B^{n-1/2}(t) := \begin{cases} \frac{t - t^{n-3/2}}{\Delta t} & t^{n-3/2} \leq t < t^{n-1/2} \\ \frac{t^{n+1/2} - t}{\Delta t} & t^{n-1/2} \leq t < t^{n+1/2} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (11)$$

$$B_{j+1/2}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{j-1}}{\Delta x} \right)^2 & x_{j-1} \leq x < x_j \\ \frac{3}{4} - \left(\frac{x - x_{j+1/2}}{\Delta x} \right)^2 & x_j \leq x < x_{j+1} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{j+2}}{\Delta x} \right)^2 & x_{j+1} \leq x < x_{j+2} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (12)$$

对于每个光滑的试探函数 ϕ 和局部试探函数 $\phi_{j+1/2}^{n-1/2}$, 都存在与 Δt 和 Δx 无关的系数 $\beta_{j+1/2}^{n-1/2}$ 使其满足^[12]

$$\phi(x, t) = \sum_j \sum_n \beta_{j+1/2}^{n-1/2} \phi_{j+1/2}^{n-1/2}(x, t) + o(\Delta^2) \quad (13)$$

将式(10)~式(12)代入式(13)后再代入式(9)进行简单的计算可得到

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^\Delta, \phi) = \sum_j \sum_n \beta_{j+1/2}^{n-1/2} \mathbf{R}_{j+1/2}^{n-1/2} + o(\Delta^4)$$

其中

$$\mathbf{R}_{j+1/2}^{n-1/2} = \bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{F}} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}} &= \frac{1}{6} (\mathbf{u}_{j+3/2}^n - \mathbf{u}_{j+3/2}^{n-1}) \Delta x + \frac{2}{3} (\mathbf{u}_{j+1/2}^n - \\ &\quad \mathbf{u}_{j+1/2}^{n-1}) \Delta x + \frac{1}{6} (\mathbf{u}_{j-1/2}^n - \mathbf{u}_{j-1/2}^{n-1}) \Delta x \quad (14b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \frac{1}{4} [f(\mathbf{u}_{j+3/2}^n) - f(\mathbf{u}_{j-1/2}^n)] \Delta t + \\ &\quad \frac{1}{4} [f(\mathbf{u}_{j+3/2}^{n-1}) - f(\mathbf{u}_{j-1/2}^{n-1})] \Delta t \quad (14c) \end{aligned}$$

就是弱局部剩余量. 它的大小 $\|\mathbf{R}_{j+1/2}^{n-1/2}\|_\infty$ 和 Δ ($\Delta = \max(\Delta t, \Delta x)$) 有关系^[12]

$$\|\mathbf{R}_{j+1/2}^{n-1/2}\|_\infty \propto \begin{cases} \Delta & \text{激波附近} \\ \Delta^\alpha & \text{接触间断附近 } 1 < \alpha \leq 2 \\ \Delta^\beta & \text{光滑区域 } \beta = \min\{r+2, 4\} \end{cases} \quad (15)$$

其中 r 是所选用数值格式的精度, 本文使用的是熵守恒格式, 所以 $r=2$. 这个关系表示在激波附近 WLR 的大小与 Δ 同量级, 在接触间断处与 Δ^α 同量级, 在光滑区域与 Δ^β 同量级.

2.2 自适应人工黏性熵稳定格式

增加人工黏性的双曲守恒律方程的一般形式如下:

$$\mathbf{u}_t + f(\mathbf{u})_x = C(\epsilon(\mathbf{u}) \mathbf{u}_x)_x \quad (16)$$

其中黏性比例系数 C 是可调节的正系数, $\epsilon(\mathbf{u})$ 是一个非负量, 它的大小依赖 $\mathbf{u}$ 的局部特点而改变. 假定某个时间层 t^n 的近似数值解 $\bar{\mathbf{u}}_j^n$ 和 WLR 的值 $\mathbf{R}_{j+1/2}^n$ 已经得到, 那么可以用下面的半离散格式对方程(16)的数值解进行演化

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{u}}_j = -\frac{1}{\Delta x} (f_{j+1/2}^{ea} - f_{j-1/2}^{ea}) \quad (17a)$$

其中数值通量 $f_{j+1/2}^{ea}$ (上标中 e 和 a 分别为 entropy 和 adptive 的缩写) 为

$$f_{j+1/2}^{ea} = f_{j+1/2}^{ec} - (C \epsilon_{j+1/2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{j+1/2} / \Delta x) \quad (17b)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{j+1/2} := \bar{\mathbf{u}}_{j+1} - \bar{\mathbf{u}}_j \quad (17c)$$

$$\epsilon_{j+1/2} = \max(|\mathbf{R}^{(1)}|, |\mathbf{R}^{(2)}|, |\mathbf{R}^{(3)}|) \quad (17d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)} &= \max(|\mathbf{R}_{j-1/2}^{(k)}|, |\mathbf{R}_{j+1/2}^{(k)}|) \\ k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (17e)$$

$\mathbf{R}_{j+1/2}^{(k)} (k=1,2,3)$ 是向量 $\mathbf{R}_{j+1/2}^n$ 的第 k 个分量 (显然对于标量方程没有上标 k). 在此本文对 $\epsilon_{j+1/2}$ 做了简单修正. 在文献[12]中有

$$\epsilon_{j+1/2} = \max(|\mathbf{R}_{j-1/2}^{(k)}|, |\mathbf{R}_{j+1/2}^{(k)}|, |\mathbf{R}_{j+3/2}^{(k)}|)$$

其中 $\epsilon_{j+1/2}$ 只取了 $\mathbf{R}_{j+1/2}^n$ 的某一个分量,但是这个分量的选取与具体的实际问题有很大关系[12],对不同的问题选取不同的分量效果可能不同或者有些分量甚至会使计算无法进行. 本文正是为了避免这种缺陷,同时响应上文的关系式(15),在每个交界面处取 3 个分量中的最大值,每个分量又在相邻的两个交界面处取最大值 (见式(17d)和式(17e)),这种取值对所有的问题具有一致性,有利于在实践中使用,并且将由此得到的格式(17)称为 EA 格式.

弱局部剩余量公式(14)给出的是利用时间 t^{n-1} 层和 t^n 层分别对应的数值解 $\mathbf{u}$ 及其通量 $\mathbf{f}$ 的值计算中间 $t^{n+1/2}$ 层的弱局部剩余量 $\mathbf{R}_{j+1/2}^{n+1/2}$, 那么要计算 t^n 层的弱局部剩余量 $\mathbf{R}_{j+1/2}^n$, 就要用 $t^{n-1/2}$ 层和 $t^{n+1/2}$ 层的相关值进行计算,如下:

$$\mathbf{R}_{j+1/2}^n = \bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{F}}^* \quad (18a)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{6}(\mathbf{u}_{j+3/2}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{j+3/2}^{n-1/2})\Delta x + \frac{2}{3}(\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{j+1/2}^{n-1/2})\Delta x + \frac{1}{6}(\mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2}^{n-1/2})\Delta x \quad (18b)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^* = \frac{1}{4}[\mathbf{f}(\mathbf{u}_{j+3/2}^{n+1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1/2})]\Delta t + \frac{1}{4}[\mathbf{f}(\mathbf{u}_{j+3/2}^{n-1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{j-1/2}^{n-1/2})]\Delta t \quad (18c)$$

针对此公式,本文将熵守恒格式(6)和 EA 格式(17)交替使用进行数值实现,下面给出相关符号说明和计算步骤(为方便,统一省略下标记号).

符号说明: $\mathbf{u}^0$ 为时间 t^0 层的初始值; $\bar{\mathbf{u}}^n (n \geq 0)$ 为 EA 格式在时间 t^n 层的数值解; $\tilde{\mathbf{u}}^n (n \geq 0)$ 为 熵守恒格式在时间 t^n 层的数值解; $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2} (n \geq 0)$ 为 熵守恒格式在时间 $t^{n+1/2}$ 层的数值解; $\mathbf{R}^n (n \geq 1)$ 为时间 t^n 层的弱局部剩余量.

具体计算步骤:

步骤 1 根据初始条件 $\mathbf{u}^0$ 求出 $\bar{\mathbf{u}}^0$, 并令 $\tilde{\mathbf{u}}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0$.

步骤 2 通过熵守恒格式(6)由 $\tilde{\mathbf{u}}^0$ 在 Δt 时间步长上演化得到 $\tilde{\mathbf{u}}^1$, 并令 $\bar{\mathbf{u}}^1 = \tilde{\mathbf{u}}^1$.

步骤 3 应用熵守恒格式(6)将 $\tilde{\mathbf{u}}^0$ 在 $\Delta t/2$ 的时间步长上演化得到 $\tilde{\mathbf{u}}^{1/2}$.

步骤 4 假设 $\bar{\mathbf{u}}^n (n \geq 1)$ 已经求出,由熵守恒格式(6)将 $\tilde{\mathbf{u}}^{n-1}$ 在 $3\Delta t/2$ 时间步长上演化得到

$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}$.

步骤 5 由已求得的 $\tilde{\mathbf{u}}^{n-1/2}$ 和 $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}$ 使用公式(18)计算得到 $\mathbf{R}^n$.

步骤 6 由 $\bar{\mathbf{u}}^n$ 和 $\mathbf{R}^n$ 通过 EA 格式演化得到 $\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$, 并令 $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^{n+1}$, 转入步骤 4, 进行 $\bar{\mathbf{u}}^{n+2}$ 的计算.

本文在计算 $\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1/2}$ 时采用 3 次多项式重构. 这种方法会在单元交界面 $x = x_{j+1/2}$ 处出现间断,即产生左右两个值,针对这种情况有 3 种处理方法[12]:一是选用交界面左边的值;二是选用交界面右边的值;三是选用左右两个值的凸组合. 本文的数值算例一律采用交界面左边的值,即(省略上标时间层 n)

$$\bar{u}_{j+1/2} = \frac{1}{6}(-\bar{u}_{j-1} + 5\bar{u}_j + 2\bar{u}_{j+1})$$

EA 格式的黏性通量 $C\epsilon_{j+1/2}\Delta\bar{u}_{j+1/2}/\Delta x$ 在单元交界面 $x = x_{j+1/2}$ 附近与 WLR 的大小成比例,结合关系式(15),在理论上可得:激波区域有足够数量的黏性抑制振荡;接触间断处黏性较小,不会使解过份抹平;光滑区域黏性更微弱,能够使计算保持高精度. 下面通过算例进行说明.

3 数值算例

本文有 4 个数值算例,每个算例都以熵稳定 ERoe 格式和高分辨率熵稳定 EYee 格式作为参照来说明 EA 格式的稳定性 and 整体的高分辨率. 在时间演化上一律采用 3 阶 Runge-Kutta 方法[16]

$$\mathbf{u}_j^* = \mathbf{u}_j^n + \Delta t L(\mathbf{u}_j^n)$$

$$\mathbf{u}_j^{**} = \frac{3}{4}\mathbf{u}_j^n + \frac{1}{4}\mathbf{u}_j^* + \frac{1}{4}\Delta t L(\mathbf{u}_j^*)$$

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{u}_j^n + \frac{2}{3}\mathbf{u}_j^{**} + \frac{2}{3}\Delta t L(\mathbf{u}_j^{**})$$

每个算例中 EA 格式的黏性比例系数 C 的理想范围(这个范围内的效果基本相同)和具体选取的值在表 1 中给出.

表 1 黏性比例系数在数值算例中的理想范围和取值

Table 1 Optimal interval of C and the chosen one for each numerical example

算例	C 的理想范围	C 的取值
1	[7.10, 7.20]	7.15
2	[5.50, 6.00]	5.80
3	[0.045, 0.055]	0.05
4	[0.50, 1.50]	1.00

算例 1 Burgers 方程间断初值问题

在区域 $x \in [-1, 1]$ 上给定初值

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/3 \\ -1 & 1/3 < |x| \leq 1 \end{cases}$$

采用周期边界条件, 取 CFL (Courant-Friedrichs-Lecry) 数为 0.1, 空间网格数为 $N = 30$, 计算到时间 $t = 0.3$. 这个问题的精确解主要包括左边由 -1 到 1 的一个稀疏波和右边由 1 到 -1 的一个定常激波. 本例对照了 ERoe 格式、

EYee 格式和 EA 格式的计算结果, 见图 1. 其中图 1(a)~图 1(c)显示这 3 种格式对稀疏波的捕捉都比较准确, 只是 ERoe 格式出现了一定幅度的跳跃, EYee 和 EA 格式比 ERoe 格式有所改善, 且 EA 格式类似前两种格式在间断位置处没有产生伪振荡, 抹平程度也有所改善, 满足高分辨率的要求. 图 1(d)显示了 3 种格式的总熵 $\Delta x \sum_i u_i^2 / 2$ 随着时间的变化, 可以看出 EA 格式如

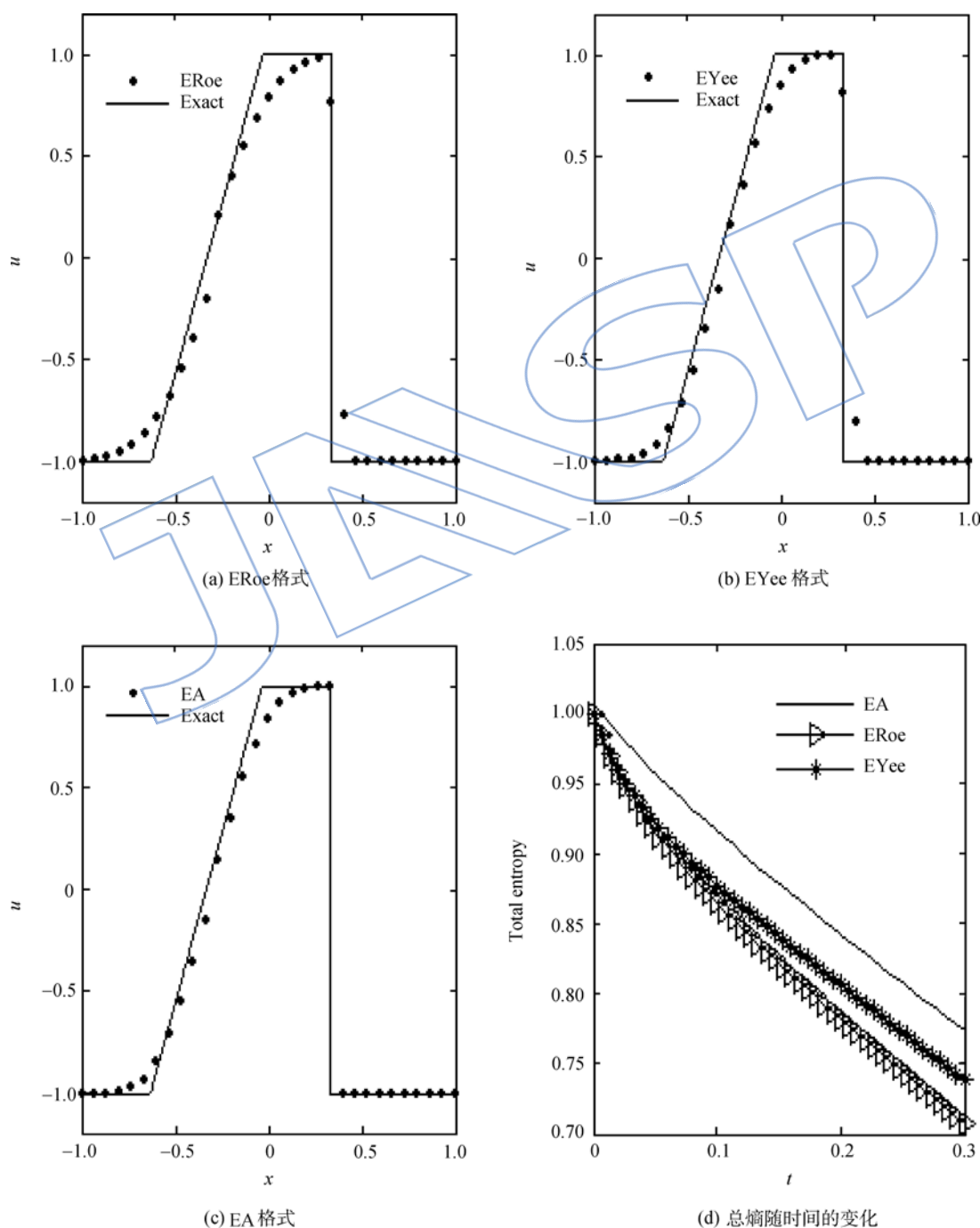


图 1 Burgers 方程间断初值问题的数值结果 ($t=0.3, N=30$)

Fig. 1 Numerical results of discontinuous initial value problem of Burgers equation ($t=0.3, N=3$)

同 ERoe 和 EYee 格式一样对总熵有所耗散, 因而是熵稳定的.

算例 2 一维 Euler 方程 Sod 激波管问题

取计算区域为 $[-0.5, 0.5]$, 初始条件为

$$(\rho \quad u \quad p) = \begin{cases} (1.0 \quad 0 \quad 1.0) & x < 0 \\ (0.125 \quad 0 \quad 0.1) & x > 0 \end{cases}$$

采用齐次 Neumann 边界条件, 取 CFL 数为 0.4, 空间网格数为 $N = 100$, 计算到时间 $t = 0.1$. 其精确解主要包括稀疏波、接触间断和激波. 采用 ERoe 格式、EYee 格式和 EA 格式对密

度的计算结果进行对照说明, 见图 2. 3 种格式的解都没有产生振荡, 其中由于 ERoe 格式是 1 阶精度, 在解的间断位置抹平得较为严重, EYee 格式对解的捕捉效果比较精确, EA 格式在接触间断处和激波处比 ERoe 格式有很大的改善, 但在这两个位置上都比 EYee 格式抹平得严重一点, 整体上达到了和 EYee 几乎同样的效果, 这些特点通过图 2(d) 中 3 种格式的总熵 $-\Delta x \sum_i (\rho_i S_i)$ 随时间变化的比较也可体现, EA 格式的耗散比

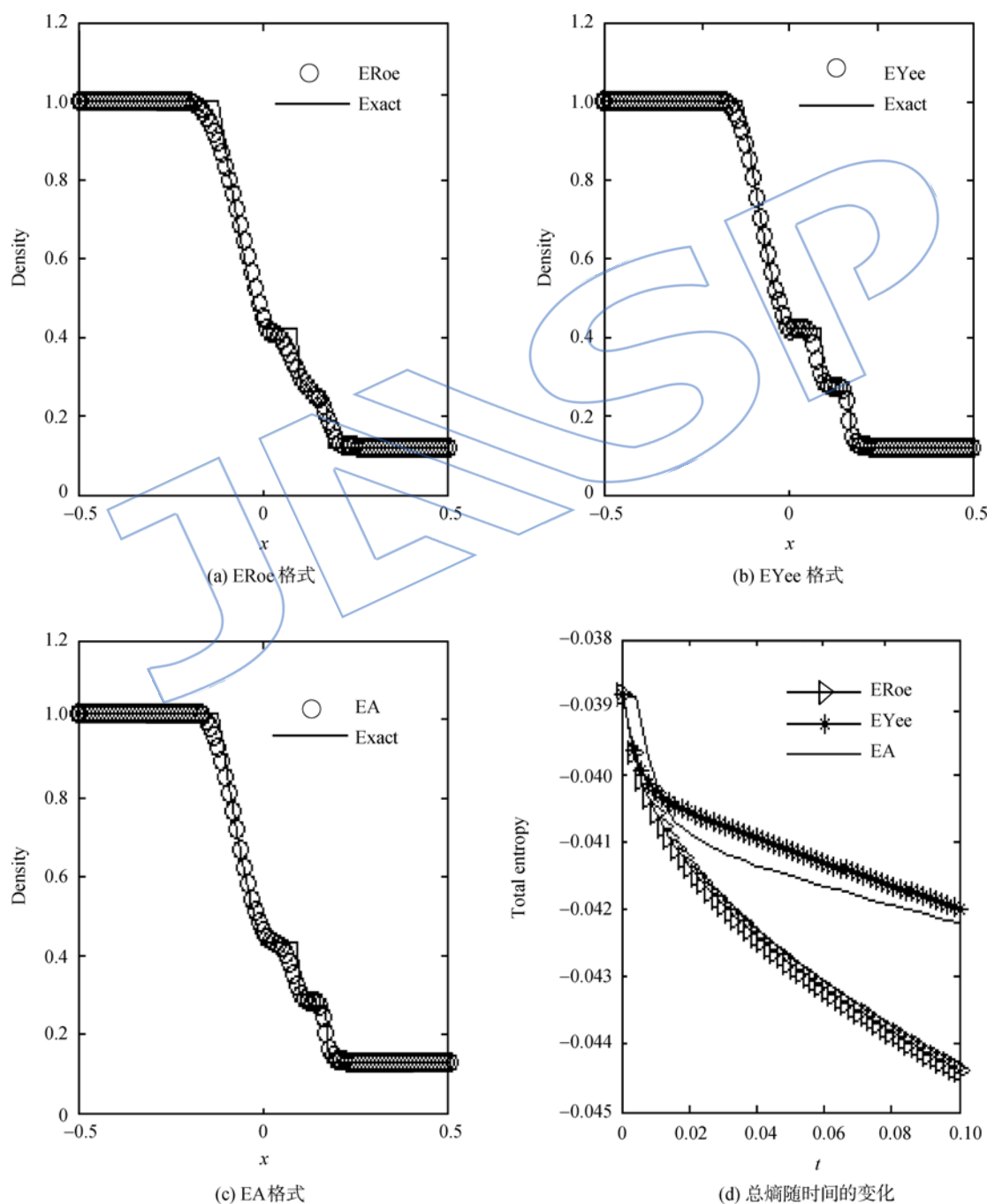


图 2 一维 Euler 方程 Sod 激波管问题的数值结果 ($t=0.1, N=100$)

Fig. 2 Numerical results of Sod shock tube problem of one-dimensional Euler equation ($t=0.1, N=100$)

EYee 多一点, 而比 ERoe 要少得多, 但总熵和这两者一样是减少的, 故是熵稳定的.

算例 3 一维 Euler 方程强稀疏波问题

在区域 $[-10, 15]$ 上取初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0 & 0 & 100\,000) & x < 0 \\ (0.01 & 0 & 1000) & x > 0 \end{cases}$$

采用齐次 Neumann 边界条件, 取 CFL 数为 0.4, 空间网格数为 $N=100$, 计算到时间 $t=$

0.01. 其精确解包括稀疏波、接触间断和激波. 采用上述 3 种格式, 密度的计算结果如图 3 所示. ERoe 格式的解在 $x=0$ 位置出现了较明显的膨胀激波, EYee 格式和 EA 格式的解在稀疏波段均有一个平滑的过渡, 且 EA 格式比 EYee 格式表现得更好. 同算例 2 中一样, 在接触间断和激波处, EA 格式比 ERoe 格式有很大的改进, 但比 EYee 格式抹平得严重一些. 图 3(d) 显示了 3 种

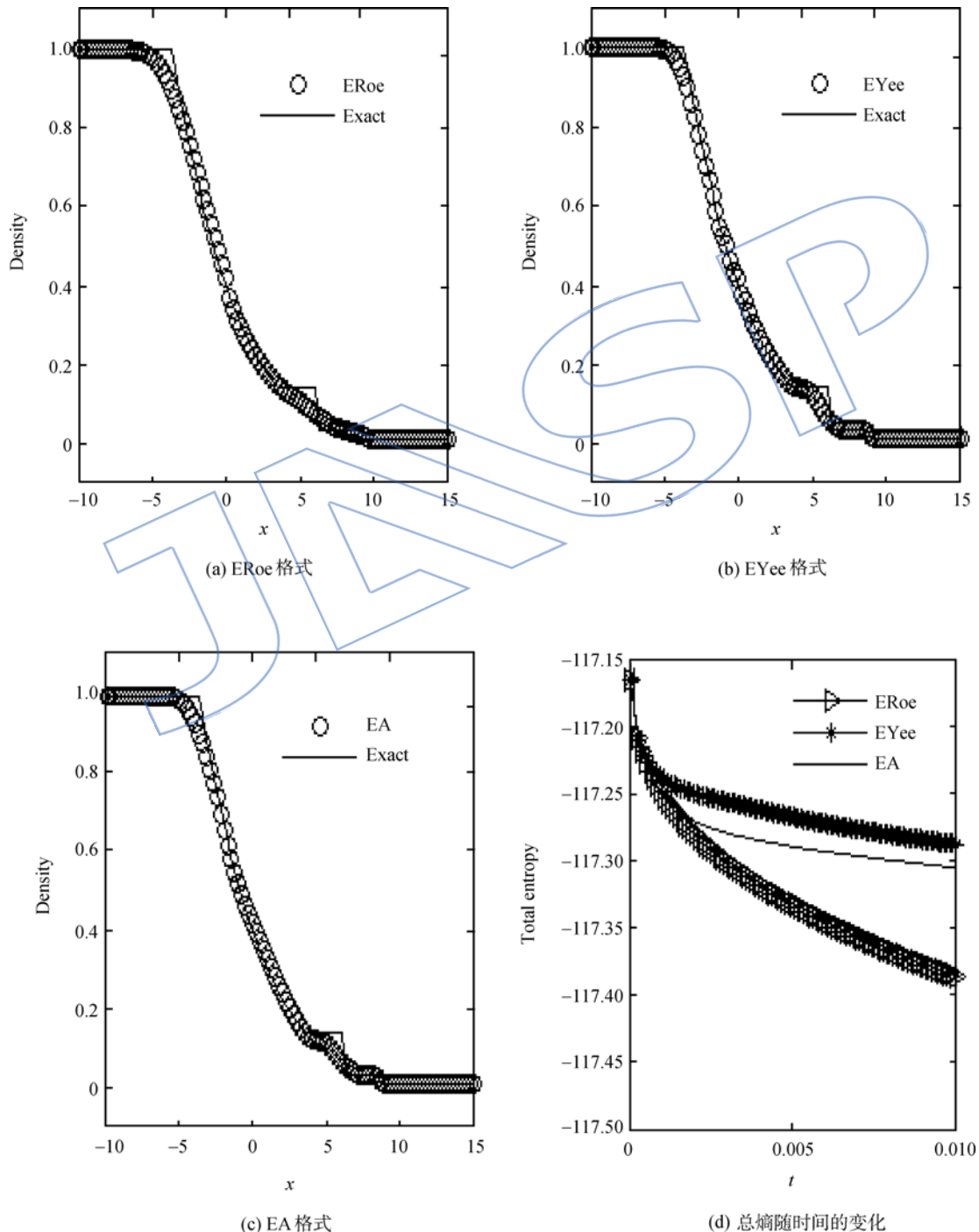


图 3 一维 Euler 方程强稀疏波问题的数值结果 ($t=0.01, N=100$)

Fig. 3 Numerical results of strong expansion problem of one-dimensional Euler equation ($t=0.01, N=100$)

格式对应的总熵关于时间的变化,可见 EA 格式对总熵的耗散比 EYee 多,所以抹平会明显一点,但总熵的耗散同样说明 EA 格式是熵稳定的.

算例 4 一维 Euler 方程低密度流问题

在区域 $[-0.5, 0.5]$ 上取初始条件

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0 & -1.5 & 0.4) & x < 0 \\ (1.0 & 1.5 & 0.4) & x > 0 \end{cases}$$

采用齐次 Neumann 边界条件,取 CFL 数为 0.4,空间网格数 $N=100$,计算到时间 $t=0.05$.

该算例的精确解包括两个强稀疏波和一个平凡的接触间断. 其解的特点是:在中间部分的压力几乎为零,接近于真空状态,很多数值方法在这个位置上会出现压力为负的情况,使计算无法进行下去. 本文中采用的 ERoe, EYee 和 EA 这 3 种格式都能使计算顺利完成,且都对解的结构有准确的捕捉,见图 4. 可以看到对于本算例,EA 格式的结果比 ERoe 和 EYee 格式的结果有明显的改善. 图 4(d)是各格式的总熵关于时间变化的对照,可

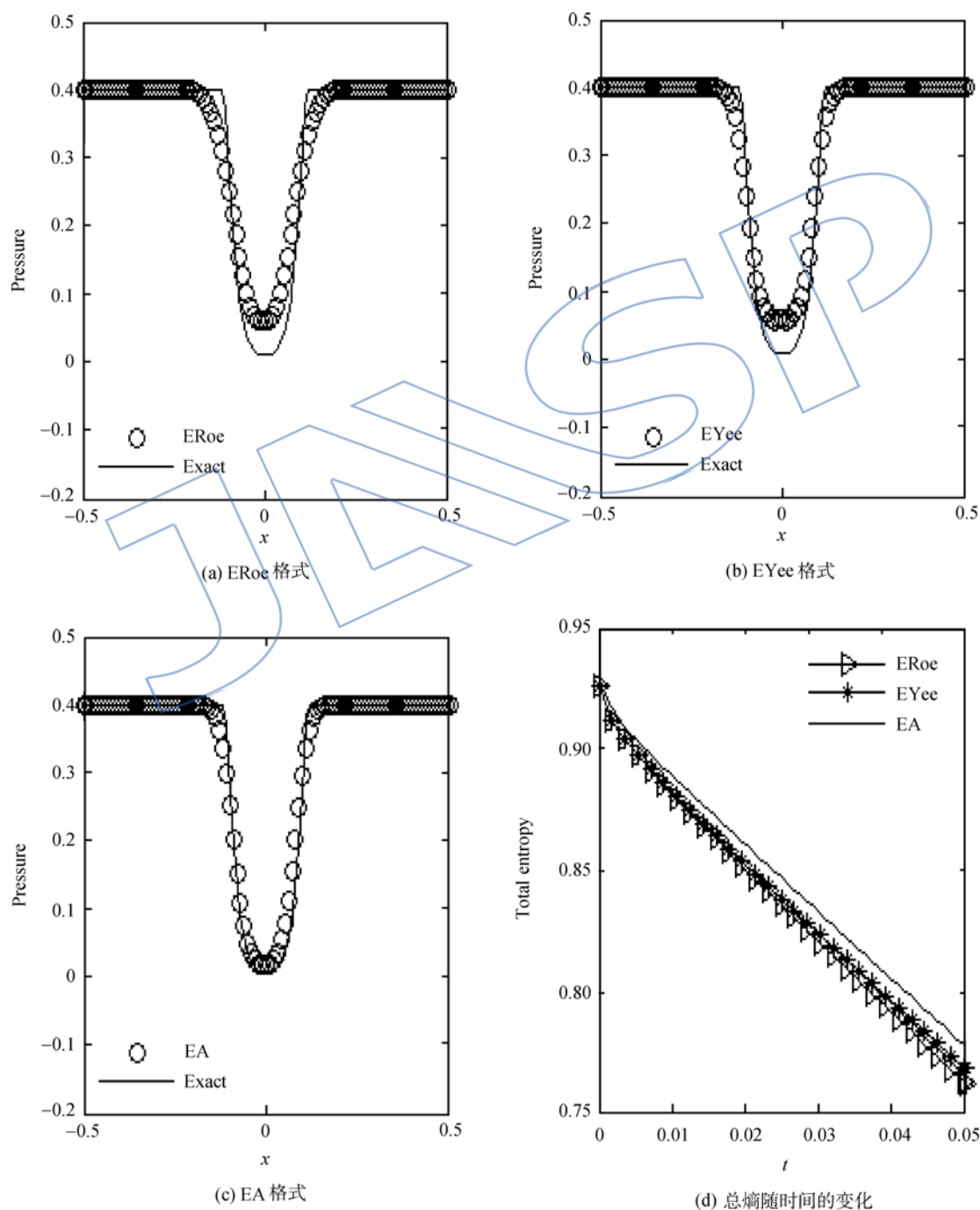


图 4 一维 Euler 方程低密度流问题的数值结果 ($t=0.05, N=100$)

Fig. 4 Numerical results of low density flow problem of one-dimensional Euler equation ($t=0.05, N=100$)

见 EA 格式同样对总熵有所耗散,故能达到熵稳定的效果.

4 结 论

本文构造了求解双曲守恒律方程的形式简单的自适应人工黏性熵稳定格式,在熵守恒格式的基础上增加适量修正后的自适应人工黏性,使总熵有所耗散,达到熵稳定. 基于其人工黏性自适应的特点,该格式可在整体上达到高分辨率,尤其是只有激波或接触间断出现时,效果会优于 EYee 格式(算例 1 和算例 4 可以说明). 但是还有其不足的地方:一是需要对黏性比例系数进行调试,虽然过程并不复杂,可以像文献[11]中一样在很粗略的网格上稍作调试,找到理想的系数后再用于精细网格的计算,但是始终不是对所有的问题有一个统一的系数范围或系数取值;二是在接触间断处弱局部剩余量的大小与 Δ 的量级参数 α 仍然较小(见式(15)),以至于当激波和接触间断同时出现时,黏性比例系数不好调衡,总会顾此失彼(如算例 2 和算例 3,本文选取的是两者基本兼顾的黏性比例系数),对于这两个缺陷将在以后进一步从黏性比例系数与具体问题的内在联系以及黏性比例系数本身的构造上优化和提高.

参考文献:

- [1] Lax P D. Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computations[J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1954, 7(1): 159-193.
- [2] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves[C]// SIAM Regional Conferences Lectures in Applied Mathematics. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1973: 1-48.
- [3] Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws: I [J]. Mathematics of Computation, 1987, 49(179): 91-103.
- [4] Tadmor E, Zhong W. Entropy stable approximations of Navier-Stokes equations with no artificial numerical viscosity[J]. Journal of Hyperbolic Differential Equation, 2006, 3(3): 529-559.
- [5] Tadmor E, Zhong W. Energy preserving and stable approximations for the two-dimensional shallow water equations[M]// Munthe-Kass H, Owren B. Mathematics and Computation: a Contemporary View. Alesund, Norway: Springer, 2008: 67-94.
- [6] Roe P L. Entropy conservative schemes for Euler equations [R]. Lyon: Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems Theory, Numerics, Applications, 2006.
- [7] Yee H C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 1987, 68(1): 151-179.
- [8] 罗力, 封建湖, 唐小娟, 等. 求解双曲守恒律方程的高分辨率熵稳定格式[J]. 计算物理, 2010, 27(5): 671-678.
LUO Li, FENG Jianhu, TANG Xiaojuan, et al. High resolution entropy stable schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 27(5): 671-678. (in Chinese)
- [9] Von Neumann J, Richtmyer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks[J]. Journal of Applied Physics, 1950, 21(3): 232-237.
- [10] Guermond J L, Pasquetti R. Entropy-based nonlinear viscosity for Fourier approximations of conservation laws[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2008, 346(13): 801-806.
- [11] Guermond J L, Pasquetti R, Popov B. Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(11): 4248-4267.
- [12] Kurganov A, Liu Y. New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(24): 8114-8132.
- [13] Tadmor E. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems[J]. Acta Numerica, 2003, 12(1): 451-512.
- [14] Ismail F, Roe P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: entropy production at shocks[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(15): 5410-5436.
- [15] Karni S, Kurganov A. Local error analysis for approximate solutions of hyperbolic conservation laws[J]. Advances in Computational Mathematics, 2005, 22(1): 79-99.
- [16] Gottlieb S, Shu C W, Tadmor E. Strong stability-preserving high-order time discretizations methods[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics Review, 2001, 43(1): 89-112.